GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

MATEMATICĂ
EXERCIȚII ȘI PROBLEME PENTRU CLASA A IX – A PROFIL INFORMATICĂ

EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2025

CUPRINS

Tiparul executat la
EDITURII HYPERION SRL
CRAIOVA

1. Mulțimi și elemente de logică matematică
1.1 Mulțimea numerelor reale
1.1.1 Numere raționale
a) Scurtă teorie

1. Mulțimea numerelor naturale: **N** $= \{0, 1, 2, \cdots, \}$.
2. Mulțimea numerelor întregi: **Z** $= \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, \}$.
3. a) **Număr rațional** = mulțimea tuturor fracțiilor ordinare **echivalente** cu o fracție ordinară dată.
b) Fracțiile ordinare $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ unde $m, n, p, q \in \mathbf{Z}, n \neq 0, q \neq 0$ sunt **echivalente** dacă și numai dacă $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np$.
c) **Mulțimea numerelor raționale**: **Q** $= \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\right\}$.
În mod evident avem incluziunile: **N** ⊂ **Z** ⊂ **Q**
4. a) **Fracție ireductibilă** = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt prime între ele (cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este egal cu 1).
b) **Fracție reductibilă** = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt multipli de un număr $p \neq 1$.
5. Fracție zecimală. Fiind dat numărul rațional $\frac{m}{n}$, prin împărțirea lui m la n se obține fracția zecimală $a, a_1 a_2 a_3 \cdots$, unde a este un număr întreg, iar $a_1, a_2, a_3 \cdots$ sunt cifre (iau valori în mulțimea $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$)

Dacă după virgulă fracția zecimală are un număr finit de zecimale atunci ea se numește **fracție zecimală finită.**

Dacă după virgulă fracția zecimală are un număr infinit de zecimale atunci ea se numește **fracție zecimală infinită**.

Fracțiile zecimale infinite care reprezintă numere raționale au o grupă de cifre care se repetă de o infinitate de ori și care se numește **perioadă.**

Perioada poate fi **simplă** sau **mixtă**.

b) Probleme alese rezolvate

1. Stabilește care din relațiile de mai jos sunt adevărate:

a) $-2 \in \mathbf{N}$ b) $12 \in \mathbf{Z}$ c) $\frac{2}{3} \in \mathbf{Z}$ d) $2,(3) \in \mathbf{Q}$

Soluție. a) $-2 \notin \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots,\}$, deci relația nu este adevărată.

b) $12 \in \mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots,\}$, deci relația este adevărată.

c) $\frac{2}{3} \notin \mathbf{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots,\}$, deci relația nu este adevărată.

d) $2,(3) = 2 + \frac{3}{9} = \frac{2 \cdot 9 + 3}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \in \mathbf{Q}$.

2. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $\frac{1}{2}$ și $\frac{29}{3}$.

Soluție. Avem: $\frac{1}{2} = 0{,}5$ și $\frac{29}{3} = 9{,}(6)$. Numerele căutate sunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Determină 6 numere raţionale cuprinse între:

a) -1 și 2 b) $-\frac{3}{4}$ și 5 c) 4 și $\frac{25}{4}$.

Soluție. a) $0, 1 \in \mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$. Alte 4 numere raționale pot fi:

$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

4. Arată că fracțiile $\frac{3}{7}$ și $\frac{9}{21}$ sunt echivalente.

Soluție. Fracțiile $\frac{3}{7}$ și $\frac{9}{21}$ sunt echivalente deoarece $3 \cdot 21 = 7 \cdot 9 = 63$.

5. Arată că fracțiile $\frac{5}{11}$ și $\frac{8}{13}$ sunt ireductibile.

Soluție. Fracțiile $\frac{5}{11}$ și $\frac{8}{13}$ sunt ireductibile deoarece 5 și 11, respectiv 8 și 13 sunt prime între ele.

6. Arată că fracțiile $\frac{6}{14}$ și $\frac{9}{12}$ sunt reductibile.

Soluție. Fracțiile $\frac{6}{14}$ și $\frac{9}{12}$ sunt reductibile, deoarece 6 și 14 sunt multipli de 2, iar 9 și 12 sunt multipli de 3.

7. Transformă fracțiile ordinare:

a) $\frac{7}{5}$ b) $-\frac{15}{4}$ c) $\frac{125}{8}$

în fracții zecimale.

Soluție. a) $\frac{7}{5} = 1{,}4$ b) $-\frac{15}{4} = -3{,}75$ c) $\frac{125}{8} = 15{,}625$.

8. Transformă fracțiile ordinare:

a) $\frac{11}{3}$ b) $-\frac{17}{6}$ c) $\frac{41}{3}$

în fracții zecimale.

Soluție. a) $\frac{11}{3} = 3{,}666 \cdots = 3,(6)$

b) $-\frac{17}{6} = -2{,}8333 \cdots = -2{,}8(3)$.

c) $\frac{41}{3} = 13{,}666 \cdots = 13,(6)$.

9. Transformă fracțiile zecimale:

a) $0,(6)$ b) $3,(21)$ c) $2{,}12(3)$

în fracții ordinare.

Soluție. a) $0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

b) $3,(21) = 3 + \frac{21}{99} = 3 + \frac{7}{33} = \frac{106}{33}$.

c) $2{,}12(3) = 2 + \frac{123-12}{900} = 2 + \frac{111}{900} = 2 + \frac{37}{300} = \frac{637}{300}$

10. Determină $n \in \mathbf{N}$ astfel încât fracțiile următoare să fie echivalente cu numere naturale:

a) $\frac{6}{n+1}$ b) $\frac{n+6}{n+2}$ c) $\frac{2n+9}{n+3}$

Soluție. a) Fracția $\frac{6}{n+1}$ este echivalentă cu un număr natural dacă $n+1$ este divizor al lui 6. Divizorii lui 6 sunt: 1, 2, 3, 6.

$n+1 = 1 \Rightarrow n = 0; n+1 = 2 \Rightarrow n = 1; n+1 = 3 \Rightarrow n = 2$ și $n+1 = 6 \Rightarrow n = 5$. Deci $n = 0, 1, 2, 5$.

b) $\frac{n+6}{n+2} = \frac{n+2+4}{n+2} = 1 + \frac{4}{n+2}$. În continuare se procedează ca la a) și se obține $n = 0, 2$.

c) $\frac{2n+9}{n+3} = \frac{2n+6+3}{n+3} = \frac{2(n+3)+3}{n+3} = 2 + \frac{3}{n+3}$. Se procedează ca la a) și se obține $n = 0$.

11. Determină $n \in \mathbf{N}$, astfel încât $\frac{n}{n+4}$ să fie echivalentă cu $\frac{3}{5}$.

Soluție. Fracția $\frac{n}{n+4}$ este echivalentă cu $\frac{3}{5}$ dacă $\frac{n}{n+4} = \frac{3}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow 5n = 3n + 12 \Rightarrow 2n = 12 \Rightarrow n = 6$.

12. Arată că fracția $\frac{3+6+9+\cdots+150}{4+8+12+\cdots+200}$ este reductibilă.

Soluție. $3 + 6 + 9 + \cdots + 150 = 3(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$ și
$4 + 8 + 12 + \cdots + 200 = 4(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$.
Fracția este reductibilă deoarece atât numărătorul cât și numitorul sunt multipli de numărul $1 + 2 + 3 + \cdots + 50$.

13. Arată că fracția $\frac{n(n+1)}{2n+4}$ este reductibilă.

Soluție. $n(n + 1)$ se divide cu 2, deoarece n și $n + 1$ sunt consecutive și $2n + 4 = 2(n + 2)$ se divide cu 2.
Atunci fracția este reductibilă.

14. Determină x astfel încât fracțiile $\frac{2}{7}$ și $\frac{4}{x+2}$ să fie echivalente.

Soluție. Fracțiile $\frac{2}{7}$ și $\frac{4}{x+2}$ sunt echivalente dacă $\frac{2}{7} = \frac{4}{x+2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2(x + 2) = 7 \cdot 4 \Leftrightarrow 2x + 4 = 28 \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 12$.

15. Determină numărul natural n, astfel încât fracția $\frac{n+9}{n+3}$ să devină număr natural.

Soluție. $\frac{n+9}{n+3} = \frac{n+3+6}{n+3} = 1 + \frac{6}{n+3}$ și devine număr natural pentru: $n + 3 = 3 \Rightarrow n = 0$ și $n + 3 = 6 \Rightarrow n = 3$.

16. Arată că fracția $\frac{n^2+n}{4n+2}$ este reductibilă. Determină cea mai mică valoare naturală a lui n cu care se simplifică fracția.

Soluție. $\frac{n^2+n}{4n+2} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ și este reductibilă deoarece $n(n + 1)$ se divide cu 2, ca produs de 2 numere naturale consecutive și $2(2n + 1)$ se divide prin 2. Cea mai mică valoare naturală a lui n cu care se simplifică fracția este 2.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Determină care dintre relațiile de mai jos sunt adevărate:
a) $-2 \in \mathbf{Z}$ b) $-5 \in \mathbf{N}$ c) $\frac{5}{7} \in \mathbf{N}$ d) $\frac{3}{8} \in \mathbf{Q}$ e) $-9 \in \mathbf{Q}$.

2. Determină care dintre relațiile de mai jos sunt adevărate:
a) $-5 \in \mathbf{N}$ b) $7 \in \mathbf{N}$ c) $7,(3) \in \mathbf{N}$ d) $\frac{7}{8} \in \mathbf{Z}$ e) $2,5 \in \mathbf{Q}$.

3. Determină perechile de fracții echivalente dintre:
a) $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{3}$ și $\frac{12}{9}$; c) $\frac{1}{3}$ și $\frac{7}{15}$; d) $\frac{5}{2}$ și $\frac{20}{8}$; e) $\frac{4}{7}$ și $\frac{7}{12}$.

4. Determină dintre fracțiile: $\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{3}{5}, \frac{11}{8}, \frac{11}{31}, \frac{15}{25}, \frac{17}{32}, \frac{27}{45}, \frac{12}{35}$ pe cele echivalente cu fracția $\frac{6}{10}$.

5. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $\frac{11}{2}$ și $\frac{45}{4}$.

6. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $-\frac{17}{3}$ și $\frac{71}{8}$.

7. Determină toate fracțiile de forma $\frac{n}{2}$ cuprinse între numerele naturale 3 și 9.

8. Determină x astfel încât fracțiile $\frac{4}{9}$ și $\frac{x+3}{27}$ să fie echivalente.

9. Determină fracțiile reductibile de la a) și ireductibile de la b):
a) $\frac{2}{3}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}, \frac{10}{8}, \frac{11}{33}, \frac{15}{17}, \frac{17}{31}, \frac{27}{36}, \frac{15}{35}$ b) $\frac{2}{7}, \frac{3}{6}, \frac{4}{11}, \frac{11}{7}, \frac{12}{32}, \frac{15}{35}, \frac{17}{34}, \frac{27}{41}$.

10. Transformă fracția ordinară: a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{13}{6}$ b) $\frac{33}{7}$ în fracție zecimală. Calculează a zecea zecimală a fiecărei fracții.

11. Determină n astfel încât fracția $\frac{n-9}{n-3}$ să devină număr întreg.

12. Determină n astfel încât fracția $\frac{n^2+3n+8}{n^2-n+6}$ să devină număr întreg. Determină cea mai mică valoare naturală a lui n.

1.1.2 Numere iraționale. Numere reale

a) Scurtă teorie

1. Număr irațional = numărul reprezentat de o fracție zecimală, infinită, neperiodică.

Exemple. a) $\sqrt{2} = 1{,}4142135\cdots$ b) $\sqrt{7} = 2{,}6457513\cdots$

2. Notăm **mulțimea tuturor numerelor iraționale** cu **R − Q**.

3. Număr real = orice număr rațional sau irațional.

4. Notăm **mulțimea tuturor numerelor reale** cu **R** și avem egalitatea $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$.

Evident au loc relațiile:

a) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ b) $\mathbf{R} - \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ c) $\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = \varnothing$.

b) Probleme alese rezolvate

1. Precizați patru valori naturale pentru n astfel încât numărul $\sqrt{n^2 - n + 1}$ să fie irațional.

Soluție. Pentru $n = 2$ obținem $\sqrt{2^2 - 2 + 1} = \sqrt{3} = 1{,}732\cdots$.
Pentru $n = 3$ obținem $\sqrt{3^2 - 3 + 1} = \sqrt{7} = 2{,}645\cdots$.
Pentru $n = 4$ obținem $\sqrt{4^2 - 4 + 1} = \sqrt{13} = 3{,}605\cdots$.
Pentru $n = 5$ obținem $\sqrt{5^2 - 5 + 1} = \sqrt{21} = 4{,}582\cdots$.

2. Determinați $n \in \mathbf{N}$ pentru care numărul $\sqrt{n^2 + 5}$ este rațional.

Soluție. Fie $m \in \mathbf{N}$ astfel încât să avem egalitatea:
$\sqrt{n^2 + 5} = m \Rightarrow n^2 + 5 = m^2 \Rightarrow m^2 - n^2 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow (m + n)(m - n) = 5 \Rightarrow m + n = 5, m - n = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 3, n = 2$. Deci valoarea lui n este 2.

3. Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ numerele de forma $\sqrt{5n + 2}$ sunt iraționale.

Soluție. Dacă n este par, $n = 2k \Rightarrow 5n + 2 = 10k + 2$ și are deci ultima cifră egală cu 2.

Dacă n este impar, $n = 2k + 1 \Rightarrow 5n + 2 = 5(2k + 1) + 2 = 10k + 7$ și are decă ultima cifră egală cu 7.

Numerele de forma $5n + 2$ au ultima cifră 2 sau 7 și nu pot fi pătrate perfecte. Atunci numerele $\sqrt{5n + 2}$ sunt iraționale.

4. Arătați că $\sqrt{2}$ este număr irațional.

Soluție. Presupunem că $\sqrt{2}$ este număr rațional. Atunci $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, unde p, q sunt ireductibile. Prin ridicare la pătrat $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$, de unde p^2 este par, sau p este par. Atunci $p = 2m \Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow q^2 = 2m^2$, de unde q este par. Atunci p, q sunt reductibile (se divid cu 2), ceea ce este fals. Deci $\sqrt{2}$ este număr irațional.

5. Fie x un număr irațional. Să se demonstreze că:

a) Dacă $x > 0$, atunci $\sqrt{x}$ este irațional.

b) Dacă $x \neq 0$, atunci $\frac{1}{x}$ este irațional.

Soluție. a) Presupunem prin absurd că $\sqrt{x} \in Q \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{p}{q}$, unde $p, q \in \mathbf{Z}$. Atunci $x = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbf{Q}$, ceea ce este fals.

b) Presupunem prin absurd că $\frac{1}{x} \in Q \Rightarrow x \in Q$, ceea ce este fals.

6. Arată că dacă $a, b \in \mathbf{N}$ sunt impare, atunci $\sqrt{a^2 + b^2} \notin \mathbf{Q}$.

Soluție. Fie $a = 2p + 1, b = 2q + 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = (2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 = 4 \cdot (p^2 + q^2 + p + q) + 2 = M4 + 2$ și atunci rezultă că $a^2 + b^2$ se divide cu 2 și nu se divide cu 4. Presupunem prin absurd că $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{m}{n}$ și $\frac{m}{n}$ fracție ireductibilă. Atunci avem:

$(a^2 + b^2) \cdot n^2 = m^2 \Rightarrow m = 2m_1$, de unde $(a^2 + b^2) \cdot n^2 = 4m_1^2$, sau $n = 2n_1$ și fracția $\frac{m}{n}$ este reductibilă.

7. Arată că dacă x este rațional și y irațional, atunci $x + y$ este număr irațional.

Soluție. Presupunem că $x + y$ este rațional. Atunci $y = (x + y) - x \in Q$, ceea ce este fals.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Determină numerele raționale de forma $\sqrt{n+1}$, unde n este număr natural mai mic decât 10.

2. Determină toate numerele iraționale de forma $\sqrt{2n+1}$, unde n este număr natural pătrat perfect de 2 cifre.

3. Calculați $\sqrt{5}$ cu 7 zecimale. Determină de câte ori apare cifra 6 printre aceste zecimale.

4. Fie numerele: $\sqrt{16}, \sqrt{99}, \frac{3}{4}$, 1,(3), $\sqrt{121}, \sqrt{44}, \sqrt{75}$.
Determină dintre acestea toate numerele iraționale.

5. Determină numărul natural de o cifră n, astfel încât numărul $\sqrt{n+4}$ să fie rațional.

6. Determină numărul natural de două cifre n, astfel încât numărul $\sqrt{n+65}$ să fie natural de o cifră.

7. Determină toate numerele naturale de 2 cifre n, astfel încât numărul $\sqrt{n+10}$ să fie rațional.

8. Determină numărul natural n pentru care numărul $\sqrt{n^2+9}$ este rațional.

9. Determină toate numerele naturale n, astfel încât $\sqrt{n+6}$ să fie rațional și $\sqrt{n+6} \leq 6$.

10. Demonstrează că există o infinitate de numere iraționale.

11. Arătați că numărul $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ este irațional.

12. Arată că dacă x este rațional și y irațional, atunci $x+2y$ este număr irațional.

13. Arată că dacă x este rațional și y irațional, atunci $x-y$ este număr irațional.

14. Arată că dacă x este rațional și y irațional, atunci $3x+2y$ este număr irațional.

1.1.3 Operații algebrice cu numere reale
Puteri cu exponent întreg.
a) Scurtă teorie

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adunarea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

a) Proprietățile adunării

1) Asociativitatea: $(x+y)+z=x+(y+z)\ (\forall)x,y,z \in \mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $x+y=y+x\ (\forall)x,y \in \mathbf{R}$;
3) Element neutru 0: $x+0=0+x=x\ (\forall)x \in \mathbf{R}$;
4) Element opus: : $x+(-x)=(-x)+x\ (\forall)x \in \mathbf{R}$; numărul $-x$ se numește opusul lui x.

b) Proprietățile înmulțirii

1) Asociativitatea: $(xy)z=x(yz)\ (\forall)x,y,z \in \mathbf{R}$;
2) Comutativitatea: $xy=yx\ (\forall)x,y \in \mathbf{R}$;
3) Element neutru 1: $x \cdot 1=1 \cdot x=x\ (\forall)x \in \mathbf{R}$;
4) Element inversabil : $x \cdot \frac{1}{x}=\frac{1}{x} \cdot x=1\ (\forall)\ x \in \mathbf{R},\ \ x \neq 0$;
numărul $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui x.

c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare

1) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$x(y+z)=xy+xz\ (\forall)x,y,z \in \mathbf{R}.$$

Observație. Ca operații derivate ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.
a) $x-y=x+(-y), (\forall)x,y \in \mathbf{R}$;
b) $x:y=x \cdot \frac{1}{y}, y \neq 0$.

d) Formule de calcul prescurtat

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;
3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;
4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
6) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

7) $(a-b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$;
8) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
9) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
10) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$, $n\geq 2, n\in \mathbf{N}$;
11) $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\dots-ab^{n-2}+b^{n-1})$, $n\geq 2,\ n\in \mathbf{N}$, impar.

e) Alte formule algebrice utile

1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$;
2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$;
3) $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=[(a+b)^2-2ab]^2-$ $-2a^2b^2$;
4) $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$;
5) $a^6+b^6=(a^2+b^2)^3-3a^2b^2(a^2+b^2)$;
6) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2ab-2ac-2bc$;
7. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=$
$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$;
8) a) $a^3+b^3+c^3-3abc=$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=$
$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$.
9) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

f) Proprietățile puterilor cu exponent întreg

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n=a^{m-n}, a\neq 0$;
3) $(a^m)^n=a^{mn}$;
4) $(ab)^m=a^m\cdot b^m$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$, $b\neq 0$.

b) Probleme alese rezolvate

1. Demonstrați egalitatea:
$$1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$
Soluție. Notăm: $S=1+2+\dots+(n-1)+n$ (1).
Avem de asemenea: $S=n+n-1+\dots+1$ (2).
Adunând membru cu membru (1) și (2) obținem:
$2S=(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)=n(n+1)\Rightarrow$
$\Rightarrow S=\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Aduceți la forma cea mai simplă:
$$\frac{1+2+\dots+100}{1+2+\dots+50}.$$
Soluție. Conform **1.** avem: $1+2+\dots+100=\frac{100\cdot 101}{2}=$
$=50\cdot 101$ și $1+2+\dots+50=\frac{50\cdot 51}{2}=25\cdot 51$.
$\frac{1+2+\dots+100}{1+2+\dots+50}=\frac{50\cdot 101}{25\cdot 51}=\frac{202}{51}$.

3. Aduceți la forma cea mai simplă:
$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{15}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{20}\cdot\sqrt{4}.$$
Soluție. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{3}$ și asemănător:
$\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}=5\sqrt{2}$; $\sqrt{15}\cdot\sqrt{5}=5\sqrt{3}$; $\sqrt{20}\cdot\sqrt{4}=4\sqrt{5}$.
Atunci $\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{15}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{20}\cdot\sqrt{4}=2\sqrt{3}+$ $+5\sqrt{2}+5\sqrt{3}+4\sqrt{5}=7\sqrt{3}+5\sqrt{2}+4\sqrt{5}$.

4. Verificați egalitatea:
$$\sqrt{2}+\sqrt{18}+\sqrt{98}=\sqrt{8}+\sqrt{32}+\sqrt{50}.$$
Soluție. $\sqrt{2}+\sqrt{18}+\sqrt{98}=\sqrt{2}+3\sqrt{2}+7\sqrt{2}=11\sqrt{2}$.
$\sqrt{8}+\sqrt{32}+\sqrt{50}=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}+5\sqrt{2}=11\sqrt{2}$.

5. Raționalizați numitorul: $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2}$.

Soluție. $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2}=\frac{(\sqrt{12}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\frac{\sqrt{60}-\sqrt{10}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{5-4}=$