

LBRIS

We know
books

GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

**MATEMATICĂ
EXERCII ȘI PROBLEME
PENTRU CLASA A IX – A
PROFIL INFORMATICĂ**

**EDITURA HYPERION
CRAIOVA 2025**

	Enunțuri	Rezolvări
1. Mulțimi și elemente de logică matematică	5	210
1.1 Mulțimea numerelor reale	5	210
1.1.1 Numere raționale	5	210
1.1.2 Numere iraționale. Numere reale	10	211
1.1.3 Operații algebrice cu numere reale. Puteri cu exponent întreg	13	213
1.1.4 Ordonarea numerelor reale	20	214
1.1.5 Modulul unui număr real	22	215
1.1.6 Aproximări, trunchieri, rotunjiri	26	216
1.1.7 Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real	29	217
1.1.8 Operații cu intervale de numere reale	34	218
1.2 Elemente de logică matematică	38	220
1.2.1 Propoziție, predicat, cuantificatori. Operații logice elementare	38	220
1.2.2 Mulțimi. Corelarea elementelor de logică matematică cu operațiile și relațiile cu mulțimi	43	221
1.2.3 Tipuri de raționamente logice. Metoda reducerii la absurd. Metoda inducției matematice	48	222
1.2.4 Probleme de numărare	52	224
1.3 Inegalități	54	224
1.4 Teste grilă de autoevaluare	59	225
Testul 1	59	225
Testul 2	60	226
Testul 3	61	227
2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale. Șiruri. Progresii aritmetice. Progresii geometrice	62	228
2.1 Șiruri	62	228
2.2 Progresii aritmetice	66	228
2.3 Progresii geometrice	72	230
2.4 Teste grilă de autoevaluare	77	232
Testul 1	77	232
Testul 2	78	232
3. Funcții, lecturi grafice	79	233

3.1 Reper cartezian, produs cartezian, drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m$, $m \in \mathbf{R}$	79	233
3.2 Noțiunea de funcție, funcții egale. Imaginea unei funcții	82	234
3.3 Funcții numerice. Graficul unei funcții numerice	84	235
3.4 Proprietăți ale funcțiilor numerice; mărginire, monotonie	87	236
3.5 Proprietăți ale funcțiilor numerice; paritate, imparitate, periodicitate	90	237
3.6 Compunerea funcțiilor	92	238
3.7 Teste grilă de autoevaluare	96	240
Testul 1	96	240
Testul 2	97	240
4. Funcția de gradul I	98	241
4.1 Ecuația de gradul I	98	241
4.2 Funcția afină. Funcția de gradul I. Grafic. Monotonie.	101	242
4.3 Semnul funcției de gradul I. Inecuații de gradul I	104	243
4.4 Poziția relativă a două drepte. Sisteme de ecuații de gradul I	108	244
4.5 Sisteme de inecuații de gradul I	112	245
4.6 Teste grilă de autoevaluare	114	245
Testul 1	114	245
Testul 2	115	246
5. Funcția de gradul al doilea	116	247
5.1 Ecuația de gradul al doilea	116	247
5.2 Funcția de gradul al doilea. Monotonie. Punct de extrem. Intersecția funcției cu axele de coordonate. Graficul funcției	124	249
5.3 Semnul funcției de gradul al II-lea. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă	130	251
5.4 Teste de evaluare	135	252
Testul 1	135	252
Testul 2	136	253
6. Vectori în plan	137	254
6.1 Segmente orientate	137	254
6.2 Vectori. Operații cu vectori	141	254
6.3 Vectori coliniari. Descomp.unui vector după		

doi vectori dați, necoliniari și nenuli	147	256
6.4 Coliniaritate, concurență, paralelism. Teorema bisectoarei, relația lui Sylvester, teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva	151	257
6.5 Teste de evaluare	158	259
Testul 1	158	259
7. Trigonometrie și aplicațiile trigonometriei în geometrie	159	260
7.1 Unități de măsură pentru unghiuri și arce . .	159	260
7.2 Rezolvarea triunghiului dreptunghic . . .	161	261
7.3 Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice	166	263
7.4 Reducerea la primul cadran	172	264
7.5 Formule de legătură între funcțiile trigo- nometrice	177	265
7.6 Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri	180	266
7.7 Formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, ale unghiului triplu, ale jumătății unui unghi	185	268
7.8 Formule pentru transformarea sumei sau diferenței de funcții trigonometrice în produs	191	269
7.9 Teste grilă de autoevaluare	197	271
Testul 1	197	271
Testul 2	198	272
8. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar în geometria plană	199	274
8.1 Produsul scalar a doi vectori	199	274
8.2 Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Teorema sinusurilor. Teorema cosinusului. Calcularea razei cercului înscris, circumscris și exânscriș în triunghi. Calcul de arii	202	275
8.3 Teste grilă de autoevaluare	208	278
Testul 1	208	278
Testul 2	209	279

**Tiparul executat la
EDITURII HYPERION SRL
CRAIOVA**

1. Mulțimi și elemente de logică matematică**1.1 Mulțimea numerelor reale****1.1.1 Numere raționale****a) Scurtă teorie**

1. **Mulțimea numerelor naturale:** $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, \}$.
2. **Mulțimea numerelor întregi:** $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \}$.
3. a) **Număr rațional** = mulțimea tuturor fracțiilor ordinare **echivalente** cu o fracție ordinară dată.
b) Frațiile ordinare $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ unde $m, n, p, q \in \mathbf{Z}, n \neq 0, q \neq 0$ sunt **echivalente** dacă și numai dacă $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np$.
c) **Mulțimea numerelor raționale:** $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\}$.
În mod evident avem incluziunile: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$
4. a) **Fracție ireductibilă** = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt prime între ele (cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este egal cu 1).
b) **Fracție reductibilă** = fracția ordinară $\frac{m}{n}$, unde m și n sunt multipli de un număr $p \neq 1$.
5. **Fracție zecimală.** Fiind dat numărul rațional $\frac{m}{n}$, prin împărțirea lui m la n se obține fracția zecimală $a, a_1 a_2 a_3 \dots$, unde a este un număr întreg, iar $a_1, a_2, a_3 \dots$ sunt cifre (iau valori în mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$)
Dacă după virgulă fracția zecimală are un număr finit de zecimale atunci ea se numește **fracție zecimală finită**.
Dacă după virgulă fracția zecimală are un număr infinit de zecimale atunci ea se numește **fracție zecimală infinită**.
Fracțiile zecimale infinite care reprezintă numere raționale au o grupă de cifre care se repetă de o infinitate de ori și care se numește **perioadă**.
Perioada poate fi **simplă** sau **mixtă**.

b) Probleme alese rezolvate

1. Stabilește care din relațiile de mai jos sunt adevărate:

- a) $-2 \in \mathbf{N}$ b) $12 \in \mathbf{Z}$ c) $\frac{2}{3} \in \mathbf{Z}$ d) $2, (3) \in \mathbf{Q}$

Soluție. a) $-2 \notin \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, deci relația nu este adevărată.

b) $12 \in \mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, deci relația este adevărată.

c) $\frac{2}{3} \notin \mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, deci relația nu este adevărată.

d) $2, (3) = 2 + \frac{3}{9} = \frac{2 \cdot 9 + 3}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \in \mathbf{Q}$.

2. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $\frac{1}{2}$ și $\frac{29}{3}$.

Soluție. Avem: $\frac{1}{2} = 0,5$ și $\frac{29}{3} = 9,(6)$. Numerele căutate sunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Determină 6 numere raționale cuprinse între:

- a) -1 și 2 b) $-\frac{3}{4}$ și 5 c) 4 și $\frac{25}{4}$.

Soluție. a) $0, 1 \in \mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$. Alte 4 numere raționale pot fi: $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$; $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$.

4. Arată că fracțiile $\frac{3}{7}$ și $\frac{9}{21}$ sunt echivalente.

Soluție. Frațiile $\frac{3}{7}$ și $\frac{9}{21}$ sunt echivalente deoarece $3 \cdot 21 = 7 \cdot 9 = 63$.

5. Arată că fracțiile $\frac{5}{11}$ și $\frac{8}{13}$ sunt ireductibile.

Soluție. Frațiile $\frac{5}{11}$ și $\frac{8}{13}$ sunt ireductibile deoarece 5 și 11, respectiv 8 și 13 sunt prime între ele.

6. Arată că fracțiile $\frac{6}{14}$ și $\frac{9}{12}$ sunt reductibile.

Soluție. Frațiile $\frac{6}{14}$ și $\frac{9}{12}$ sunt reductibile, deoarece 6 și 14 sunt multipli de 2, iar 9 și 12 sunt multipli de 3.

7. Transformă fracțiile ordinare:

- a) $\frac{7}{5}$ b) $-\frac{15}{4}$ c) $\frac{125}{8}$

în fracții zecimale.

Soluție. a) $\frac{7}{5} = 1,4$ b) $-\frac{15}{4} = -3,75$ c) $\frac{125}{8} = 15,625$.

8. Transformă fracțiile ordinare:

- a) $\frac{11}{3}$ b) $-\frac{17}{6}$ c) $\frac{41}{3}$

în fracții zecimale.

Soluție. a) $\frac{11}{3} = 3,666 \dots = 3,(6)$

b) $-\frac{17}{6} = -2,8333 \dots = -2,8(3)$.

c) $\frac{41}{3} = 13,666 \dots = 13,(6)$.

9. Transformă fracțiile zecimale:

- a) $0,(6)$ b) $3,(21)$ c) $2,12(3)$

în fracții ordinare.

Soluție. a) $0,(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

b) $3,(21) = 3 + \frac{21}{99} = 3 + \frac{7}{33} = \frac{106}{33}$.

c) $2,12(3) = 2 + \frac{123-12}{900} = 2 + \frac{111}{900} = 2 + \frac{37}{300} = \frac{637}{300}$

10. Determină $n \in \mathbf{N}$ astfel încât fracțiile următoare să fie echivalente cu numere naturale:

- a) $\frac{6}{n+1}$ b) $\frac{n+6}{n+2}$ c) $\frac{2n+9}{n+3}$

Soluție. a) Frația $\frac{6}{n+1}$ este echivalentă cu un număr natural dacă $n+1$ este divizor al lui 6. Divizorii lui 6 sunt: 1, 2, 3, 6.

$n+1 = 1 \Rightarrow n = 0$; $n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$; $n+1 = 3 \Rightarrow n = 2$ și

$n+1 = 6 \Rightarrow n = 5$. Deci $n = 0, 1, 2, 5$.

b) $\frac{n+6}{n+2} = \frac{n+2+4}{n+2} = 1 + \frac{4}{n+2}$. În continuare se procedează ca la a) și se obține $n = 0, 2$.

c) $\frac{2n+9}{n+3} = \frac{2n+6+3}{n+3} = \frac{2(n+3)+3}{n+3} = 2 + \frac{3}{n+3}$. Se procedează ca la a) și se obține $n = 0$.

11. Determină $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{n}{n+4}$ să fie echivalentă cu $\frac{3}{5}$.

Soluție. Frația $\frac{n}{n+4}$ este echivalentă cu $\frac{3}{5}$ dacă $\frac{n}{n+4} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5n = 3n + 12 \Rightarrow 2n = 12 \Rightarrow n = 6$.

12. Arată că fracția $\frac{3+6+9+\dots+150}{4+8+12+\dots+200}$ este reductibilă.

Soluție. $3 + 6 + 9 + \dots + 150 = 3(1 + 2 + 3 + \dots + 50)$ și $4 + 8 + 12 + \dots + 200 = 4(1 + 2 + 3 + \dots + 50)$.

Fracția este reductibilă deoarece atât numărătorul cât și numitorul sunt multipli de numărul $1 + 2 + 3 + \dots + 50$.

13. Arată că fracția $\frac{n(n+1)}{2n+4}$ este reductibilă.

Soluție. $n(n+1)$ se divide cu 2, deoarece n și $n+1$ sunt consecutive și $2n+4 = 2(n+2)$ se divide cu 2.

Atunci fracția este reductibilă.

14. Determină x astfel încât fracțiile $\frac{2}{7}$ și $\frac{4}{x+2}$ să fie echivalente.

Soluție. Frațiile $\frac{2}{7}$ și $\frac{4}{x+2}$ sunt echivalente dacă $\frac{2}{7} = \frac{4}{x+2} \Leftrightarrow 2(x+2) = 7 \cdot 4 \Leftrightarrow 2x + 4 = 28 \Leftrightarrow 2x = 24 \Leftrightarrow x = 12$.

15. Determină numărul natural n , astfel încât fracția $\frac{n+9}{n+3}$ să devină număr natural.

Soluție. $\frac{n+9}{n+3} = \frac{n+3+6}{n+3} = 1 + \frac{6}{n+3}$ și devine număr natural pentru: $n+3 = 3 \Rightarrow n = 0$ și $n+3 = 6 \Rightarrow n = 3$.

16. Arată că fracția $\frac{n^2+n}{4n+2}$ este reductibilă. Determină cea mai mică valoare naturală a lui n cu care se simplifică fracția.

Soluție. $\frac{n^2+n}{4n+2} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ și este reductibilă deoarece $n(n+1)$ se divide cu 2, ca produs de 2 numere naturale consecutive și $2(2n+1)$ se divide prin 2. Cea mai mică valoare naturală a lui n cu care se simplifică fracția este 2.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Determină care dintre relațiile de mai jos sunt adevărate:

a) $-2 \in \mathbb{Z}$ b) $-5 \in \mathbb{N}$ c) $\frac{5}{7} \in \mathbb{N}$ d) $\frac{3}{8} \in \mathbb{Q}$ e) $-9 \in \mathbb{Q}$.

2. Determină care dintre relațiile de mai jos sunt adevărate:

a) $-5 \in \mathbb{N}$ b) $7 \in \mathbb{N}$ c) $7, (3) \in \mathbb{N}$ d) $\frac{7}{8} \in \mathbb{Z}$ e) $2,5 \in \mathbb{Q}$.

3. Determină perechile de fracții echivalente dintre:

a) $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{3}$ și $\frac{12}{9}$; c) $\frac{1}{3}$ și $\frac{7}{15}$; d) $\frac{5}{2}$ și $\frac{20}{8}$; e) $\frac{4}{7}$ și $\frac{7}{12}$.

4. Determină dintre fracțiile: $\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{3}{5}, \frac{11}{8}, \frac{11}{31}, \frac{15}{25}, \frac{17}{32}, \frac{27}{45}, \frac{12}{35}$ pe cele echivalente cu fracția $\frac{6}{10}$.

5. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $\frac{11}{2}$ și $\frac{45}{4}$.

6. Determină toate numerele naturale cuprinse între numerele raționale $-\frac{17}{3}$ și $\frac{71}{8}$.

7. Determină toate fracțiile de forma $\frac{n}{2}$ cuprinse între numerele naturale 3 și 9.

8. Determină x astfel încât fracțiile $\frac{4}{9}$ și $\frac{x+3}{27}$ să fie echivalente.

9. Determină fracțiile reductibile de la a) și ireductibile de la b):
a) $\frac{2}{3}, \frac{8}{6}, \frac{3}{5}, \frac{10}{8}, \frac{11}{33}, \frac{15}{17}, \frac{17}{31}, \frac{27}{36}, \frac{15}{35}$ b) $\frac{2}{7}, \frac{3}{6}, \frac{4}{11}, \frac{11}{7}, \frac{12}{32}, \frac{15}{35}, \frac{17}{34}, \frac{27}{41}$.

10. Transformă fracția ordinară: a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{13}{6}$ c) $\frac{33}{7}$ în fracție zecimală. Calculează a zecea zecimală a fiecărei fracții.

11. Determină n astfel încât fracția $\frac{n-9}{n-3}$ să devină număr întreg.

12. Determină n astfel încât fracția $\frac{n^2+3n+8}{n^2-n+6}$ să devină număr întreg. Determină cea mai mică valoare naturală a lui n .

1.1.2 Numere iraționale. Numere reale

a) Scurtă teorie

1. Număr irațional = numărul reprezentat de o fracție zecimală, infinită, neperiodică.

Exemple. a) $\sqrt{2} = 1,4142135 \dots$ b) $\sqrt{7} = 2,6457513 \dots$

2. Notăm mulțimea tuturor numerelor iraționale cu $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

3. Număr real = orice număr rațional sau irațional.

4. Notăm mulțimea tuturor numerelor reale cu \mathbf{R} și avem egalitatea $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup (\mathbf{R} - \mathbf{Q})$.

Evident au loc relațiile:

a) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ b) $\mathbf{R} - \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ c) $\mathbf{Q} \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = \emptyset$.

b) Probleme alese rezolvate

1. Precizați patru valori naturale pentru n astfel încât numărul $\sqrt{n^2 - n + 1}$ să fie irațional.

Soluție. Pentru $n = 2$ obținem $\sqrt{2^2 - 2 + 1} = \sqrt{3} = 1,732 \dots$

Pentru $n = 3$ obținem $\sqrt{3^2 - 3 + 1} = \sqrt{7} = 2,645 \dots$

Pentru $n = 4$ obținem $\sqrt{4^2 - 4 + 1} = \sqrt{13} = 3,605 \dots$

Pentru $n = 5$ obținem $\sqrt{5^2 - 5 + 1} = \sqrt{21} = 4,582 \dots$

2. Determinați $n \in \mathbf{N}$ pentru care numărul $\sqrt{n^2 + 5}$ este rațional.

Soluție. Fie $m \in \mathbf{N}$ astfel încât să avem egalitatea:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 5} = m &\Rightarrow n^2 + 5 = m^2 \Rightarrow m^2 - n^2 = 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m + n)(m - n) &= 5 \Rightarrow m + n = 5, m - n = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow m = 3, n = 2. &\text{ Deci valoarea lui } n \text{ este } 2. \end{aligned}$$

3. Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ numerele de forma $\sqrt{5n + 2}$ sunt iraționale.

Soluție. Dacă n este par, $n = 2k \Rightarrow 5n + 2 = 10k + 2$ și are deci ultima cifră egală cu 2.

Dacă n este impar, $n = 2k + 1 \Rightarrow 5n + 2 = 5(2k + 1) + 2 = 10k + 7$ și are decă ultima cifră egală cu 7.

Numerele de forma $5n + 2$ au ultima cifră 2 sau 7 și nu pot fi pătrate perfecte. Atunci numerele $\sqrt{5n + 2}$ sunt iraționale.

4. Arătați că $\sqrt{2}$ este număr irațional.

Soluție. Presupunem că $\sqrt{2}$ este număr rațional. Atunci $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$,

unde p, q sunt ireductibile. Prin ridicare la pătrat $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$, de unde p^2 este par, sau p este par. Atunci $p = 2m \Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2$, de unde q este par. Atunci p, q sunt reductibile (se divid cu 2), ceea ce este fals. Deci $\sqrt{2}$ este număr irațional.

5. Fie x un număr irațional. Să se demonstreze că:

a) Dacă $x > 0$, atunci \sqrt{x} este irațional.

b) Dacă $x \neq 0$, atunci $\frac{1}{x}$ este irațional.

Soluție. a) Presupunem prin absurd că $\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{p}{q}$,

unde $p, q \in \mathbf{Z}$. Atunci $x = \frac{p^2}{q^2} \in \mathbf{Q}$, ceea ce este fals.

b) Presupunem prin absurd că $\frac{1}{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$, ceea ce este fals.

6. Arată că dacă $a, b \in \mathbf{N}$ sunt impare, atunci $\sqrt{a^2 + b^2} \notin \mathbf{Q}$.

Soluție. Fie $a = 2p + 1, b = 2q + 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = (2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 = 4 \cdot (p^2 + q^2 + p + q) + 2 = 4M + 2$ și atunci rezultă că $a^2 + b^2$ se divide cu 2 și nu se divide cu 4. Presupunem prin absurd că $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{m}{n}$ și $\frac{m}{n}$ fracție ireductibilă. Atunci avem:

$$(a^2 + b^2) \cdot n^2 = m^2 \Rightarrow m = 2m_1, \text{ de unde } (a^2 + b^2) \cdot n^2 = 4m_1^2, \text{ sau } n = 2n_1 \text{ și fracția } \frac{m}{n} \text{ este reductibilă.}$$

7. Arată că dacă x este rațional și y irațional, atunci $x + y$ este număr irațional.

Soluție. Presupunem că $x + y$ este rațional. Atunci $y = (x + y) - x \in \mathbf{Q}$, ceea ce este fals.

c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Determină numerele raționale de forma $\sqrt{n+1}$, unde n este număr natural mai mic decât 10.
2. Determină toate numerele iraționale de forma $\sqrt{2n+1}$, unde n este număr natural pătrat perfect de 2 cifre.
3. Calculați $\sqrt{5}$ cu 7 zecimale. Determină de câte ori apare cifra 6 printre aceste zecimale.
4. Fie numerele: $\sqrt{16}, \sqrt{99}, \frac{3}{4}, 1, (3), \sqrt{121}, \sqrt{44}, \sqrt{75}$.
Determină dintre acestea toate numerele iraționale.
5. Determină numărul natural de o cifră n , astfel încât numărul $\sqrt{n+4}$ să fie rațional.
6. Determină numărul natural de două cifre n , astfel încât numărul $\sqrt{n+65}$ să fie natural de o cifră.
7. Determină toate numerele naturale de 2 cifre n , astfel încât numărul $\sqrt{n+10}$ să fie rațional.
8. Determină numărul natural n pentru care numărul $\sqrt{n^2+9}$ este rațional.
9. Determină toate numerele naturale n , astfel încât $\sqrt{n+6}$ să fie rațional și $\sqrt{n+6} \leq 6$.
10. Demonstrează că există o infinitate de numere iraționale.
11. Arătați că numărul $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ este irațional.
12. Arată că dacă x este rațional și y irațional, atunci $x + 2y$ este număr irațional.
13. Arată că dacă x este rațional și y irațional, atunci $x - y$ este număr irațional.
14. Arată că dacă x este rațional și y irațional, atunci $3x + 2y$ este număr irațional.

1.1.3 Operații algebrice cu numere reale
Puteri cu exponent întreg.

a) Scurtă teorie

Operațiile algebrice pe mulțimea numerelor reale sunt: adunarea și înmulțirea. Ele se definesc ca extensii ale operațiilor de adunare și înmulțire din mulțimea numerelor raționale.

a) Proprietățile adunării

- 1) Asociativitatea: $(x + y) + z = x + (y + z) (\forall)x, y, z \in \mathbf{R}$;
- 2) Comutativitatea: $x + y = y + x (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
- 3) Element neutru 0: $x + 0 = 0 + x = x (\forall)x \in \mathbf{R}$;
- 4) Element opus: $x + (-x) = (-x) + x = 0 (\forall)x \in \mathbf{R}$; numărul $-x$ se numește opusul lui x .

b) Proprietățile înmulțirii

- 1) Asociativitatea: $(xy)z = x(yz) (\forall)x, y, z \in \mathbf{R}$;
- 2) Comutativitatea: $xy = yx (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
- 3) Element neutru 1: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x (\forall)x \in \mathbf{R}$;
- 4) Element inversabil: $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1 (\forall)x \in \mathbf{R}, x \neq 0$;
numărul $\frac{1}{x}$ se numește inversul lui x .

c) Proprietate de legătură între înmulțire și adunare

- 1) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:
 $x(y + z) = xy + xz (\forall)x, y, z \in \mathbf{R}$.

Observație. Ca operații derivate ale adunării și înmulțirii se pot defini operațiile de scădere și împărțire.

- a) $x - y = x + (-y), (\forall)x, y \in \mathbf{R}$;
- b) $x : y = x \cdot \frac{1}{y}, y \neq 0$.

d) Formule de calcul prescurtat

- 1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- 2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- 3) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
- 4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- 5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
- 6) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

- 7) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc;$
 8) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$
 9) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$
 10) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$
 $n \geq 2, n \in \mathbf{N};$
 11) $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}),$
 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}, \text{ impar.}$

e) Alte formule algebrice utile

- 1) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab;$
 2) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b);$
 3) $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = [(a + b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2;$
 4) $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4);$
 5) $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2 + b^2);$
 6) $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc;$
 7. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc =$
 $= \frac{1}{2} [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2];$
 8) a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$
 $= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) =$
 $= \frac{1}{2} (a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$
 9) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a).$

f) Proprietățile puterilor cu exponent întreg

- 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n};$
 2) $a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0;$
 3) $(a^m)^n = a^{mn};$
 4) $(ab)^m = a^m \cdot b^m;$
 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0.$

b) Probleme alese rezolvate

1. Demonstrați egalitatea:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soluție. Notăm: $S = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$ (1).
 Avem de asemenea: $S = n + n - 1 + \dots + 1$ (2).
 Adunând membru cu membru (1) și (2) obținem:
 $2S = (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) = n(n + 1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}.$

2. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\frac{1+2+\dots+100}{1+2+\dots+50}$$

Soluție. Conform 1. avem: $1 + 2 + \dots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} =$
 $= 50 \cdot 101$ și $1 + 2 + \dots + 50 = \frac{50 \cdot 51}{2} = 25 \cdot 51.$
 $\frac{1+2+\dots+100}{1+2+\dots+50} = \frac{50 \cdot 101}{25 \cdot 51} = \frac{202}{51}.$

3. Aduceți la forma cea mai simplă:

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{15} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{20} \cdot \sqrt{4}.$$

Soluție. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$ și asemănător:
 $\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{2}; \sqrt{15} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{3}; \sqrt{20} \cdot \sqrt{4} = 4\sqrt{5}.$
 Atunci $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{15} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{20} \cdot \sqrt{4} = 2\sqrt{3} +$
 $+ 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 4\sqrt{5}.$

4. Verificați egalitatea:

$$\sqrt{2} + \sqrt{18} + \sqrt{98} = \sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{50}.$$

Soluție. $\sqrt{2} + \sqrt{18} + \sqrt{98} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 11\sqrt{2}.$
 $\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{50} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 11\sqrt{2}.$

5. Raționalizați numitorul: $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2}.$

Soluție. $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2} = \frac{(\sqrt{12}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{\sqrt{60}-\sqrt{10}-4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{5-4} =$